

REGULAR PAPER

2本の直線による三角形型メンバシップ関数の定義

Formalization of Triangular Membership Function Consisted of Two Linear Functions

三石 貴志[✉]Takashi Mitsuishi[✉]

長野大学企業情報学部

Faculty of Business and Informatics, Nagano University,
Shimonogo 658-1, Ueda, Japan[✉] Corresponding Author: takashi-mitsuishi@nagano.ac.jp

Proof checked by Mizar Version: 8.1.14 and MML Version: 5.83.1471

Abstract

This paper describes about article FUZZY_9. The article FUZZY_9, following on from the previous article FUZZY_8, formulates various properties regarding triangular membership functions. The main theorem is relationship between a triangular membership function composed of two straight lines and a MAX function and a triangular membership function defined from the horizontal axis coordinates of the vertices of the triangle. Moreover, defuzzified value of triangular membership function, construction of trapezoidal membership function using triangular membership function and integration of two connected functions are formalised.

1 はじめに

本アーティクルでは, [1] で定義されている TriangularFS とは異なる三角形型メンバシップ関数の表記を形式化した. 前稿 [2] においては, 絶対値関数を用いて二等辺三角形型のメンバシップ関数の表記を形式化した, 本稿では左右非対称な関数について形式化を行った. また, 三角形型メンバシップ関数の重心法による非ファジィ化値 (centroid [3], 重心値) は三角形の高さに依存しないことを定理として表した. 後半部には重心値計算にまつわる区分的線形関数の積分に関するいくつかの性質を記述した.

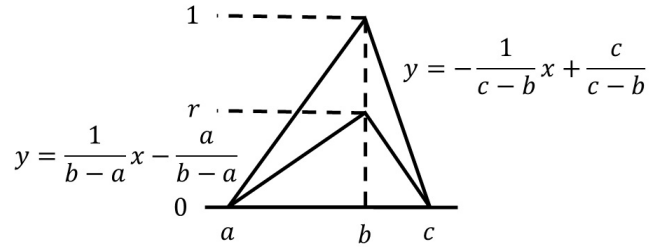


図 1. Triangular (membership) functions

2 三角形型メンバシップ関数の諸性質

2.1 2本の直線の方程式および最大値関数による三角型メンバシップ関数の定義

[1] で定義されている三角形型メンバシップ関数 (TriangularFS) は、以下の図 1 の三角形のように横軸の座標より次式のように定義されている。

$$\text{TriangularFS}(a, b, c)(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [a, c] \\ \frac{1}{b-a}x - \frac{a}{b-a} & x \in [a, b] \\ -\frac{1}{c-b}x + \frac{c}{c-b} & x \in [b, c] \end{cases} \quad (1)$$

この三角形型メンバシップ関数と、2本の直線および横軸によって三角形をなす三角形型の関数とのパラメータの関連を定理としたものが、FUZZY_9:18 および 9:19 である。図 1 の三角形型メンバシップ関数の形式化は 9:18、図 2 の三角形関数の形式化は 9:19 である。なお $r = 1$, $\frac{pt - qs}{p - s} = 1$ ならば通常のメンバシップ関数である。

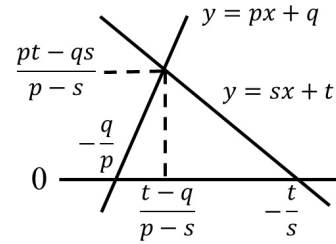


図 2. A triangle surrounded by two lines and the horizontal axis

Listing 1. FUZZY_9 : 18, 19

theorem :: FUZZY_9:18

for a,b,c,r **be** Real, f **be** Function **of** REAL,REAL **st** a < b & b < c & r > 0 &

f = r (#) (AffineMap (1/(b - a), -(a/(b - a))) |].-infty,b.] +* AffineMap (-(1/(c - b)), c/(c - b)) | [.b,+infty.[)

holds

max+ f = r (#) TriangularFS (a,b,c);

theorem :: FUZZY_9:19

for p,q,s,t **being** Real, f **being** Function **of** REAL,REAL **st** p*s < 0 & p > 0 & (p*t-q*s)/(p-s) > 0 &

for x **being** Real **holds**

f.x = ((AffineMap (p,q) |].-infty,(t-q)/(p-s).]) +* (AffineMap (s,t) | [(t-q)/(p-s),+infty.[)).x

holds

max+ f = (p*t-q*s)/(p-s) (#) (TriangularFS(-q/p,(t-q)/(p-s),-t/s));

上記 AffineMap [4] は以下のように一次関数を傾きと切片の定数で表している.

$$\text{AffineMap}(a, b)(x) = ax + b \quad (2)$$

また本研究では max+関数を用いた. これにより, メンバシップ関数値は 0 以上であるので, 関数値が 0 になる区間の関数の表記が不要となる. max+関数は RFUNCT_3 [5] で以下のとおり定義されている.

Listing 2. RFUNCT_3: def 1, 10

```

definition
let r be Real;
func max+ r -> Real equals :: RFUNCT_3: def 1
max (r, 0);

definition
let D be non empty set ;
let F be PartFunc of D, REAL;
func max+ F -> PartFunc of D, REAL means :Def10: :: RFUNCT_3: def 10
( dom it = dom F & ( for d being Element of D st d in dom it holds it . d = max+ ( F . d ) ) );

```

この max+関数を用いるために, いくつかの補題を用意した. 以下はその一部である.

Listing 3. FUZZY_9 : 15, 16

```

theorem :: FUZZY_9:15
for a, b, c, x be Real st a < b & b < c & (not x in ].a, c.[) holds
( AffineMap ( 1/(b - a), -(a/(b - a)) ) | ].-infty, b.] +* AffineMap ( -(1/(c - b)), c/(c - b) ) | [.b, +infty.[ ).x <= 0;

theorem :: FUZZY_9:16
for a, b, c, x be Real st a < b & b < c & x in [.a, c.] holds TriangularFS (a, b, c).x >= 0;

```

FUZZY_9:19 の以下の仮定

$$ps < 0, p > 0, \frac{pt - qs}{p - s} > 0 \quad (3)$$

より, TriangularFS の引数の条件

$$-\frac{q}{p} < \frac{t - q}{p - s}, \frac{t - q}{p - s} < -\frac{t}{s} \quad (4)$$

が次のように導かれる. 上の式において, 右辺から左辺を引くと

$$\begin{aligned} \frac{t - q}{p - s} - \left(-\frac{q}{p}\right) &= \frac{p(t - q) + q(p - s)}{p(p - s)} = \frac{pt - qs}{p(p - s)} > 0 \\ -\frac{t}{s} - \frac{t - q}{p - s} &= -\frac{pt - qs}{s(p - s)} > 0 \end{aligned} \quad (5)$$

が得られる. ただし, 式 (5) は $s < 0$ より成立する. 3つの不等式 (3) より (4) が導かれる命題は FUZZY_9:9 に収録した.

Listing 4. FUZZY_9 : 9

```

theorem :: FUZZY_9:9
for p, q, s, t being Real st p*s < 0 & p > 0 & (p*t - q*s)/(p - s) > 0 holds
-q/p < (t - q)/(p - s) & (t - q)/(p - s) < -t/s & -q/p < -t/s;

```

2.2 三角形型メンバシップ関数の面積と重心

次の定理 9:20 は、図 1 の $(a,0),(b,r),(c,0)$ の三角形の面積が $\frac{r(c-a)}{2}$ であることを示し、9:22 は $\text{TriangularFS}(a,b,c)$ を r 倍した関数の centroid が三角形型メンバシップ関数の高さに依らず $\frac{a+b+c}{3}$ であることを示している [6].

Listing 5. FUZZY_9 : 20, 22

```

theorem :: FUZZY_9:20
for a,b,c,r be Real, f be Function of REAL,REAL st a < b & b < c &
for x being Real holds f.x = (r (#) TriangularFS (a,b,c)).x
holds
integral(f,['a,c']) = r*(c-a)/2;

theorem :: FUZZY_9:22
for a,b,c,r be Real, f be Function of REAL,REAL st a < b & b < c & r <> 0 &
for x being Real holds f.x = (r (#) TriangularFS (a,b,c)).x
holds
centroid(f,['a,c']) = (a+b+c)/3;

```

2.3 三角形型メンバシップ関数のその他の数学的性質

筆者らはファジィ推論計算の連続性を用いてファジィ制御の最適フィードバックの存在性に関する考察を行ってきた [7]. 以下の定理 9:24 の Lipschitz 連続性は状態方程式の解の一意存在の証明に利用でき、9:25 は区分的線形関数による三角形型（メンバシップ）関数の有界性および積分可能性を表し、centroid の計算に必要な性質の一部である.

Listing 6. FUZZY_9 : 24, 25

```

theorem :: FUZZY_9:24
for A be non empty closed_interval Subset of REAL,
p,q,r,s,t,u be Real, f be Function of REAL,REAL st p*s < 0 & p > 0 &
for x be Real holds
f.x = max(r,min( u, ( (AffineMap (p,q) |].-infty,(t-q)/(p-s).]) +* (AffineMap (s,t) |[(t-q)/(p-s),+infty.[) ) .x ))
holds
f is Lipschitzian;

theorem :: FUZZY_9:25
for A be non empty closed_interval Subset of REAL,
p,q,r,s,t,u be Real, f be Function of REAL,REAL st p*s < 0 & p > 0 &
for x be Real holds
f.x = max(r,min( u, ( (AffineMap (p,q) |].-infty,(t-q)/(p-s).]) +* (AffineMap (s,t) |[(t-q)/(p-s),+infty.[) ) .x ))
holds
f is integrable_on A & f | A is bounded;

```

FUZZY_9 : 24 は、FUZZY_6:28, FUZZY_7:42 より得られる. FUZZY_9:24 の関数 f を

$$f(x) = \max\{r, \min\{u, g(x)\}\} \quad (6)$$

ただし,

$$g(x) = \begin{cases} px + q & x \leq \frac{t-q}{p-s} \\ sx + t & x \geq \frac{t-q}{p-s} \end{cases} \quad (7)$$

とする. FUZZY_6:27 より $\text{AffineMap}(p,q).x = px + q$ の Lipschitz 定数の一つとして $|p| + 1$ が存在する. 一方, FUZZY_6:26 より Lipschitz 連続な関数が演算 $+$ で結合した関

数の Lipschitz 定数はそれらの最大値が一つとして存在する. したがって, f の Lipschitz 定数として $(\max\{p, -s\} + 1)$ が存在して, 任意の $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$ に対して,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (\max\{p, -s\} + 1) |x_1 - x_2|$$

が成立する.

2.4 2つの三角形型メンバシップ関数による台形型メンバシップ関数の構成

図3の台形型メンバシップ関数は2つの三角形型メンバシップ関数の和算によって形成ができる. これを表すのが FUZZY_9:34 である. 代数積-加算-重心法 [8] による後件部のメンバシップ関数の加算による合成の特別な場合である.

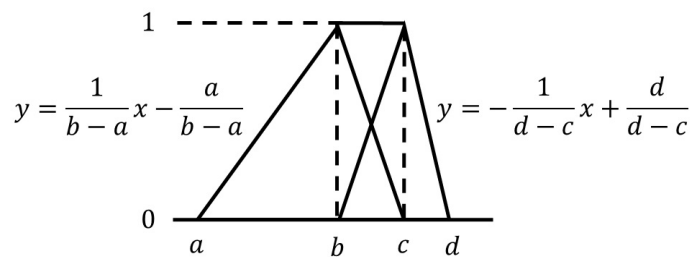


図 3. Trapezoidal membership function, TrapezoidalFS (a,b,c,d)

Listing 7. FUZZY_9 : 34

```

theorem :: FUZZY_9:34
for a, b, c, d being Real st a < b & b < c & c < d holds
TriangularFS (a,b,c) + TriangularFS (b,c,d) = TrapezoidalFS (a,b,c,d);

```

3 連結する2つの関数の性質

本節では, 2つの関数が演算 $+$ で結合した関数の性質について, その一部を紹介する. 以下はスカラ倍に関する定理である.

Listing 8. FUZZY_9 : 1, 2

```

theorem :: FUZZY_9:1
for a,b,r be Real, f be Function of REAL,REAL holds
r (#) (f | [a,b.]) = (r (#) f) | [a,b.];

theorem :: FUZZY_9:2
for r,c,d,u,v be Real, f,g be Function of REAL,REAL holds
r (#) ((f | [c,d.]) +* (g | [u,v.])) = (r (#) (f | [c,d.])) +* (r (#) (g | [u,v.]));

```

本稿では centroid 計算に必要な積分に関するいくつかの定理を証明した. 次の定理は FUZZY_8:14 および 16 [2] の被積分関数の定義域の表現を変えたものとなっている.

Listing 9. FUZZY_9 : 38, 39

```

reserve A for non empty closed_interval Subset of REAL;

theorem :: FUZZY_9:38 ::
for a being Real, f, g, h being Function of REAL,REAL st
f | A is bounded & f is integrable_on A & g | A is bounded & g is integrable_on A &
a in A & h = ( f | ].-infty,a.] ) +* ( g | [.a,+infty.[ ) & f.a = g.a
holds
h is integrable_on [ ' lower_bound A, a ' ] & h is integrable_on [ ' a, upper_bound A ' ];

theorem :: FUZZY_9:39
for a being Real, f, g, h being Function of REAL,REAL st
f | A is bounded & f is integrable_on A & g | A is bounded & g is integrable_on A &
a in A & h = ( f | ].-infty,a.] ) +* ( g | [.a,+infty.[ ) & f.a = g.a
holds
integral (h,A) = integral (f,['lower_bound A, a']) + integral (g,['a,upper_bound A']);

```

有界閉区間 A において有界かつ積分可能な関数 f および g が $a \in A$ で下の式 (8) のように連結している関数を h とするとき, h の積分は以下の式で表される.

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \leq a \\ f(a) = g(a) & x = a \\ g(x) & x \geq a \end{cases} \quad (8)$$

$$\int_A h(x)dx = \int_{\inf A}^a f(x)dx + \int_a^{\sup A} g(x)dx$$

この証明には h が定義域, 値域ともに REAL の Function である必要があるため以下の定理 [9] を適用した.

Listing 10. FUZZY_7 : 12

```

theorem :: FUZZY_7:12
for s be Real, f,g being Function of REAL,REAL holds
( f | ].-infty,s.] ) +* ( g | [.s,+infty.[ ) is Function of REAL,REAL;

```

さらに, f および g が連続であるとき, 次が成立する.

$$\text{centroid}(h, ['d, e']) = \frac{\int_d^e xh(x)dx}{\int_d^e h(x)dx} = \frac{\int_d^a xf(x)dx + \int_a^e xg(x)dx}{\int_d^e h(x)dx}$$

この式の定式化は以下の定理である.

Listing 11. FUZZY_9:3

```

theorem :: FUZZY_9:3
for f,g,h be Function of REAL,REAL, a,d,e be Real st
d <= a & a <= e & f is continuous & g is continuous &
h | [.a,c.] = f | [.a,b.] +* g | [.b,c.] &
integral(f,['d,a']) <> 0 & integral(g,['a,e']) <> 0 & f.a = g.a holds
centroid(h, ['d,e']) = 1 / integral(h,['d,e'])
* ( integral((id REAL)(#)f,['d,a']) + integral((id REAL)(#)g,['a,e']) );

```

ただし, 定数 d, a, e は上記の式 (8) に合わせて変更してある.

4 まとめ

本研究では、2本の直線（AffineMap）によって形成される三角形型メンバシップ関数について関数 TriangularFS との一致・変換を定理として形式化を行った。関数 $\max+$ を用いることにより、区分的線形関数は2つの直線の方程式だけで形成され簡略化された表記であると考えられる。本アーティクルに記述したメンバシップ関数は前件部よりはむしろ後件部の構成に有用であると期待できる。次のアーティクルでは台形型のメンバシップ関数について同様の定理類を形式化することを予定している。

参考文献

- [1] Grabowski A. The Formal Construction of Fuzzy Numbers. Formalized Mathematics. 2014;22(4):321–327.
- [2] Mitsuishi T. Symmetrical Piecewise Linear Functions Composed by Absolute Value Function. Formalized Mathematics. 2023;31(1):299–308. Available from: <https://doi.org/10.2478/forma-2023-0024>.
- [3] Mitsuishi T. Definition of Centroid Method as Defuzzification. Formalized Mathematics. 2022;30(2):125–134. Available from: <https://doi.org/10.2478/forma-2022-0010>.
- [4] Raczkowski K, Sadowski P. Real Function Continuity. Formalized Mathematics. 1990;1(4):787–791. Available from: http://fm.mizar.org/1990-1/pdf1-4/fcont_1.pdf.
- [5] Kotowicz J, Sakai Y. Properties of Partial Functions from a Domain to the Set of Real Numbers. Formalized Mathematics. 1992;3(2):279–288. Available from: http://fm.mizar.org/1992-3/pdf3-2/rfunct_3.pdf.
- [6] Mitsuishi T. Comparison of Operations in Fuzzy Approximate Reasoning and Centroid of Membership Function. In: 2024 2nd International Conference on Technology Innovation and Its Applications (ICTIIA); 2024. p. 1–5.
- [7] Mitsuishi T. Study on Continuity of Defuzzification Using Density Moment Method. In: 2023 IEEE 13th Symposium on Computer Applications and Industrial Electronics (ISCAIE); 2023. p. 90–94.
- [8] 水本雅晴. ファジィ制御の改善法 (IV) (代数積-加算-重心法による場合). 日本ファジィ学会主催・第6回「ファジィシステムシンポジウム」講演論文集. 1990;p. 9–13. Available from: <https://cir.nii.ac.jp/crid/1570009751780014720>.
- [9] Mitsuishi T. Isosceles Triangular and Isosceles Trapezoidal Membership Functions Using Centroid Method. Formalized Mathematics. 2023;31(1):59–66. Available from: <https://doi.org/10.2478/forma-2023-0006>.

- [10] Na L, Jing W. A New Defuzzification Method for Enhance Performance of Fuzzy Logic Control System. In: Wu Y, editor. Software Engineering and Knowledge Engineering: Theory and Practice. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg; 2012. p. 403–409.
- [11] MAMDANI EH. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. Proc IEE. 1974;121(12):1585–1588. Available from: <https://ci.nii.ac.jp/naid/20000916707/>.

Mizar article information

Works in Progress

FUZZY_9 Triangular fuzzy set composed of two intersecting affine maps
by Takashi Mitsuishi

Summary: The article FUZZY_9, following on from the previous article FUZZY_8 [2], formulates various properties regarding triangular membership functions. The main theorem is relationship between a triangular membership function composed of two straight lines and a MAX function and a triangular membership function defined from the horizontal axis coordinates of the vertices of the triangle. Moreover, defuzzified value [10] of triangular membership function [6], construction of trapezoidal membership function using triangular membership function [11] and integration of two connected functions [8] are formalised.